PROGRAMA
e
Metas Curriculares
Matemática A

Trigonometria e Funções Trigonométricas (11º ano)

António Bivar, Carlos Grosso, Filipe Oliveira, Luísa Loura, Maria Clementina Timóteo

GOVERNO DE PORTUGAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

Metas Curriculares

Trigonometria e Funções Trigonométricas

O estudo da **Trigonometria** começa no **ensino básico**, mais concretamente no 9º ano de escolaridade, com a definição, propriedades elementares e algumas aplicações das principais razões trigonométricas (GM9-11):

1. Construir, dado um ângulo agudo θ, **triângulos retângulos** dos quais θ é um dos ângulos internos, traçando perpendiculares de um ponto qualquer, distinto do vértice, de um dos lados de θ para o outro lado, **provar** que todos os triângulos que assim se podem construir são **semelhantes** e também semelhantes a qualquer triângulo retângulo que tenha um ângulo interno igual a θ.

2. Designar, dado um ângulo agudo θ interno a um triângulo retângulo e uma **unidade de comprimento**, por «**seno de θ**» o **quociente** entre as medidas do comprimento do **cateto oposto** a θ e da **hipotenusa** e representá-lo por $\sin(\theta)$, $\sin\theta$, $\operatorname{sen}(\theta)$ ou $\operatorname{sen}\theta$.

3. Designar, dado um ângulo agudo θ interno a um triângulo retângulo e uma **unidade de comprimento**, por «**cosseno de θ**» o **quociente** entre as medidas do comprimento do **cateto adjacente** a θ e da **hipotenusa** e representá-lo por $\cos(\theta)$ ou $\cos\theta$.

Metas Curriculares

Trigonometria e Funções Trigonométricas

4. Designar, dado um ângulo agudo θ interno a um triângulo retângulo e uma **unidade de comprimento**, por «**tangente de $\boldsymbol{\theta}$**» o **quociente** entre as medidas do comprimento do **cateto oposto** a θ e do **cateto adjacente** a θ e representá-lo por $\tan(\theta)$, $\tan\theta$, $\text{tg}\,(\theta)$ ou $\text{tg}\,\theta$.

5. Designar seno de θ, cosseno de θ e tangente de θ por «**razões trigonométricas**» de θ.

6. **Reconhecer**, fixada uma **unidade de comprimento** e dados dois ângulos θ e θ' com a **mesma amplitude** $\hat{\theta} = \widehat{\theta'}$, que o seno, cosseno e tangente de θ são respetivamente **iguais** ao seno, cosseno e tangente de θ' e designá-los também respetivamente por seno, cosseno e tangente de $\hat{\theta}$.

7. **Justificar** que o valor de cada uma das razões trigonométricas de um ângulo agudo θ (e da respetiva amplitude) é **independente** da **unidade de comprimento** fixada.

8. **Reconhecer** que o seno e o cosseno de um ângulo **agudo** são números positivos menores do que 1.

9. Provar que a soma dos quadrados do seno e do cosseno de um ângulo agudo é igual a 1 e designar este resultado por «**fórmula fundamental da Trigonometria**».

Trigonometria e Funções Trigonométricas

10. Provar que a **tangente** de um ângulo agudo é igual à **razão** entre os respetivos seno e cosseno.

11. Provar que **seno** de um ângulo agudo é igual ao cosseno de um ângulo **complementar**.

12. Determinar, utilizando **argumentos geométricos**, as razões trigonométricas dos ângulos de 45°, 30° e 60°.

13. Utilizar uma **tabela** ou uma **calculadora** para determinar o valor (**exato** ou **aproximado**) da **amplitude** de um ângulo agudo a partir de uma das suas **razões trigonométricas**.

Estes conceitos e respetivas propriedades eram depois utilizados para a resolução de diversos tipos de problemas (GM9-12):

1. Resolver **problemas** envolvendo a determinação de **distâncias** utilizando as razões trigonométricas dos ângulos de 45°, 30° e 60°.

Metas Curriculares

Trigonometria e Funções Trigonométricas

2. Resolver **problemas** envolvendo a determinação de **distâncias** utilizando ângulos agudos dados e as respetivas **razões trigonométricas** dadas por uma **máquina de calcular** ou por uma **tabela**.

3. Resolver **problemas** envolvendo a determinação de **distâncias** a **pontos inacessíveis** utilizando ângulos agudos e as respetivas **razões trigonométricas**.

No novo programa do Secundário **reforça-se** o estudo da **Trigonometria** relativamente ao que se preconizava no programa em vigor, seguindo-se, em particular também neste tema, o que consta das opções curriculares presentes no **TIMSS-Advanced**. Nomeadamente recupera-se a utilização da Trigonometria na **resolução de triângulos**, com o óbvio interesse para as aplicações.

Também no novo programa, com o objetivo de promover o conhecimento da forma como a Matemática vai sendo **construída**, procurou-se justificar, em certas situações, a **escolha** de algumas **definições** consagradas desta disciplina.

É exactamente o caso da **extensão** das definições das **razões trigonométricas** estudadas no Ensino Básico a ângulos **retos** e **obtusos**, intimamente ligada, neste programa, à extensão da **Lei dos senos** e do **Teorema de Carnot**, que permitem **resolver triângulos** de forma simples e sistemática, actividade essa que constitui o **propósito primitivo** da Trigonometria. Este estudo inicia-se no 11º ano (TRI11-1):

Trigonometria e Funções Trigonométricas

1. **Provar**, dado um triângulo acutângulo $[ABC]$, de ângulos internos $\alpha = B\hat{A}C$, $\beta = A\hat{B}C$ e $\gamma = A\hat{C}B$ e de lados de medida $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$, fixada uma unidade de comprimento, que $\frac{\sin\,\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\,\gamma}{c}$, e designar estas igualdades por «**Lei dos senos**» ou «**Analogia dos senos**».

2. **Estender** a definição do **seno** aos ângulos retos, tomando $\sin\ \alpha = 1$ quando o ângulo α é **reto**, **reconhecendo** que esta definição é a **única possível** por forma a estender a **Lei dos senos** a triângulos retângulos.

3. **Estender** a definição do **seno** aos ângulos obtusos tomando, para um ângulo α obtuso, $\sin\ \alpha = \sin\ \alpha'$, onde α' é **suplementar** a α, **reconhecendo** que esta definição é a **única possível** por forma a estender a **Lei dos senos** a triângulos obtusângulos.

4. **+Provar**, dado um triângulo $[ABC]$, de lados de medida $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$, fixada uma unidade de comprimento, e sendo **agudo** o ângulo interno em A, que, se $\alpha = B\hat{A}C$, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, e designar este resultado por «**Teorema de Carnot**» ou «**Lei dos cossenos**».

Metas Curriculares

Trigonometria e Funções Trigonométricas

5. **Estender** a definição do **cosseno** aos ângulos **retos**, tomando $\cos\ \alpha = 0$ quando o ângulo α é reto, **reconhecendo** que esta definição é a **única possível** por forma a estender a **Lei dos cossenos** ao caso de um ângulo interno reto, reconhecendo que neste caso se reduz ao **Teorema de Pitágoras**.

6. **+Estender** a definição do **cosseno** aos ângulos **obtusos** tomando, para um ângulo α obtuso, $\cos\ \alpha = -\cos\ \alpha'$, onde α' é **suplementar** a α, **reconhecendo** que esta definição é a **única possível** por forma a estender a **Lei dos cossenos** ao caso de um ângulo interno obtuso.

7. **Estender** a todos os ângulos convexos a propriedade segundo a qual, dados ângulos α e α' com a mesma amplitude $\hat{\alpha} = \widehat{\alpha'}$, o seno e o cosseno de α são respetivamente iguais ao seno e ao cosseno de α' e designá-los também respetivamente por seno e cosseno de $\hat{\alpha}$.

No **caderno de apoio** do 11º ano podem encontrar-se **sugestões** e **exemplos** que permitem cumprir o que é requerido nos descritores anteriores. Tal como acontecia no domínio Geometria Analítica, trata-se de uma ocasião privilegiada para aplicar os conhecimentos de **Geometria Euclidiana sintética** adquiridos no Básico.

Relativamente à **Lei do senos**, temos:

Metas Curriculares

Trigonometria e Funções Trigonométricas

Dado um triângulo acutângulo $[ABC]$, designamos os ângulos internos de vértice em A, B e C exatamente por essas letras, e por a, b e c as medidas de comprimento dos lados opostos, respetivamente, aos ângulos A, B e C.

Sendo h a medida da altura relativa ao vértice C, é imediato verificar, por definição do seno, que

$$h = a \sin B = b \sin A,$$

donde, em particular,

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

(Note-se que esta igualdade permanece válida em triângulos retângulos e obtusângulos em C.)

Desta forma, em triângulos acutângulos, repetindo o raciocínio relativamente a um outro vértice, facilmente se conclui que

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

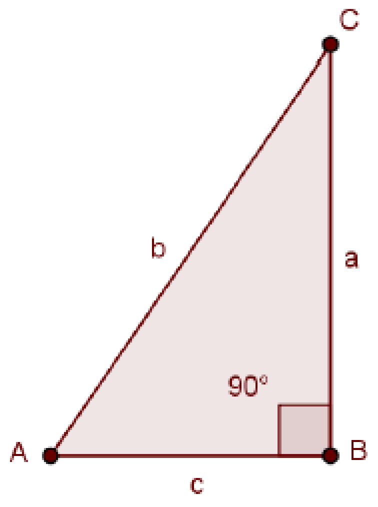
Então, quanto à **extensão do seno**:

Trigonometria e Funções Trigonométricas

Dado um triângulo $[ABC]$ retângulo em B , e designando respetivamente por a, b e c as medidas de comprimento $\overline{BC}, \overline{AC}$ e $\overline{AB}$ e os ângulos internos de vértice em A, B e C exatamente por essas letras, as equações

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{x}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

são equivalentes a $x = 1$, uma vez que $\sin A = \frac{a}{b}$ e $\sin C = \frac{c}{b}$.



Para que a Lei dos senos se possa aplicar a este triângulo devemos assim atribuir a $\sin B$ o valor 1.

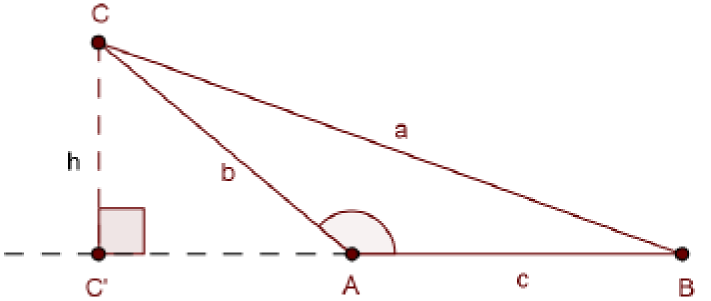
É pois esse o valor que se deve tomar para o seno dos ângulos retos de modo que a Lei dos senos se verifique em triângulos retângulos.

E, agora para **ângulos obtusos**:

Metas Curriculares

Trigonometria e Funções Trigonométricas

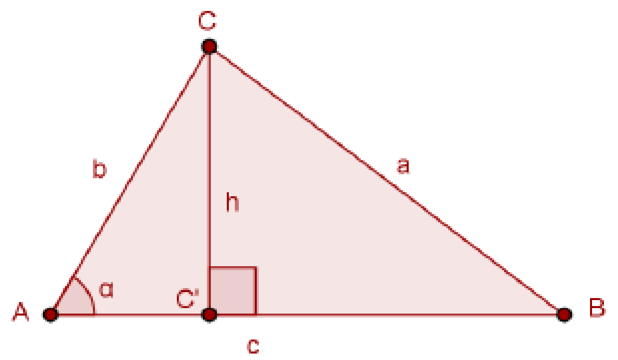
1. Considere um triângulo $[ABC]$ tal que o ângulo de vértice em A é obtuso. Designe $\overline{BC}, \overline{AC}$ e $\overline{AB}$ respetivamente por a, b e c e os ângulos de vértice em A, B e C exatamente por essas letras, seja C' a projeção ortogonal do ponto C sobre a reta AB e $h = \overline{CC'}$.



Justifique que o ponto A fica estritamente situado entre os pontos C' e B e, supondo que $\sin A$ se encontra definido de tal modo que $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$, justifique que $\sin A = \frac{h}{b}$, concluindo que $\sin A = \sin(180° - A)$.

Quanto à **lei dos cossenos (Teorema de Carnot)**:

1. Considere um triângulo $[ABC]$ tal que os ângulos internos de vértice em A e B são agudos e de lados de medida de comprimento $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$. Seja $\alpha = C\hat{A}B$ a amplitude do ângulo interno de vértice em A, considere a projeção ortogonal C' do ponto C sobre AB e seja $h = \overline{CC'}$.



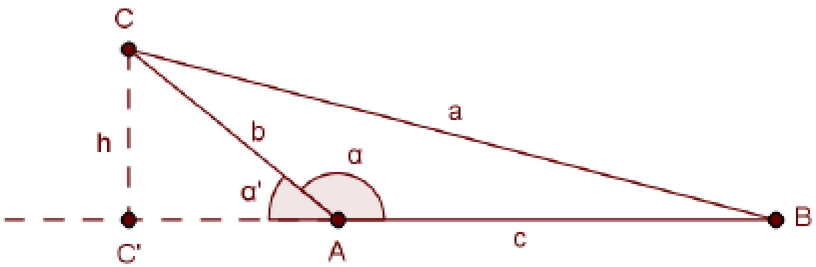
1.1. Justifique que o ponto C' fica estritamente situado entre os pontos A e B e mostre, aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos $[AC'C]$ e $[BC'C]$, que $h^2 = b^2 - (b\cos\alpha)^2 = a^2 - (c - b\cos\alpha)^2$.

1.2. Deduza da alínea anterior que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

Trigonometria e Funções Trigonométricas

Agora, quanto à **extensão do cosseno**:

1. Considere um triângulo $[ABC]$ em que o ângulo interno em A é obtuso. Seja $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ $c = \overline{AB}$, α o ângulo interno associado ao vértice A, C' a projecção ortogonal do ponto C na reta AB e α' o ângulo externo $C'AC$, suplementar de α.



1.1 Justifique que o ponto A fica estritamente situado entre os pontos C' e B e, utilizando o teorema de Pitágoras relativamente aos triângulos retângulos $[CC'A]$e $[CC'B]$, justifique que $h^2 = b^2 - (b\cos\alpha')^2 = a^2 - (b\cos\alpha' + c)^2$.

1.2 Conclua da segunda igualdade da alínea anterior que $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha'$.

1.3 *Pelo teorema de Carnot, sabe-se que, num triângulo $[ABC]$ e com as notações habituais, se os ângulos internos de vértice em A e B forem agudos, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$. Deduza da alínea anterior que para este resultado se poder estender a ângulos internos obtusos se deve definir, para um ângulo α obtuso, $\cos\alpha = -\cos\alpha'$, onde α' é um ângulo agudo suplementar de α.

Ou, para um nível de desempenho mais elevado:

Metas Curriculares

Trigonometria e Funções Trigonométricas

2.**Considere um triângulo $[ABC]$ em que o ângulo interno em A é obtuso. Seja $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$, α o ângulo interno de vértice em A e α' um ângulo externo suplementar de α.

2.1 Utilizando uma construção análoga à utilizada na demonstração do Teorema de Carnot para ângulos internos agudos, mostre que $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha'$.

2.2 Proponha um valor para o cosseno do ângulo obtuso α de tal modo que o Teorema de Carnot se estenda a ângulos internos obtusos.

Estas extensões das razões trigonométricas mais básicas bem como das leis dos senos e cossenos podem agora ser utilizadas para a chamada "**resolução de triângulos**" (TRI11-1):

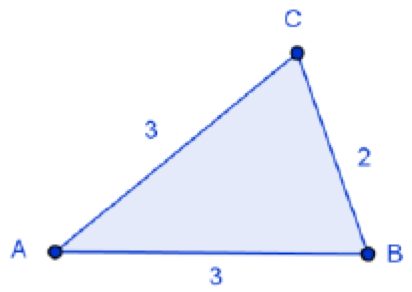
8. **Determinar**, dado um triângulo $[ABC]$, fixadas unidades de comprimento e de amplitude de ângulos e conhecidas as medidas dos **comprimentos dos três lados** (**LLL**), as medidas do comprimento de **dois dos lados** e da amplitude do **ângulo interno por eles formado** (**LAL**) ou as medidas do comprimento de **um dos lados** e das amplitudes dos dois **ângulos internos** que lhe são **adjacentes** (**ALA**), as medidas dos comprimentos dos **restantes lados** e as medidas das amplitudes dos **restantes ângulos** internos do triângulo, designar este procedimento por «**resolução do triângulo** $[ABC]$» e obter **valores aproximados** destas medidas na forma de dízimas finitas até uma dada ordem, utilizando uma **máquina de calcular**.

Trigonometria e Funções Trigonométricas

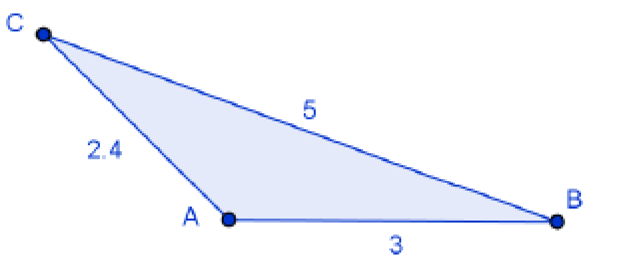
Ao dominarem este instrumento os alunos ficarão aptos a resolver inúmeros novos problemas, em situações eventualmente **mais complexas** do que as abordadas já no final do **Ensino Básico** como aplicações mais elementares da **Trigonometria**. Para o efeito será importante que adquiram alguma desenvoltura no uso das técnicas de Trigonometria atrás referidas. Assim é conveniente que, para além da exploração **situações concretas**, seja também devidamente praticada a **resolução de triângulos**, com diversos exemplos, como se sugere no texto do caderno de apoio relativo a este descritor (TRI11-1 .8):

1. Tendo em conta unicamente os dados da figura em que a medida do comprimento dos lados está expressa numa dada unidade, resolva cada um dos seguintes triângulos $[ABC]$, apresentando, quando necessário, valores aproximados à décima de grau, para a amplitude dos ângulos e aproximados à décima da unidade para os comprimentos dos lados.

1.1.



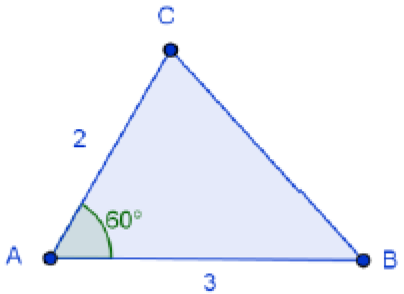
1.2



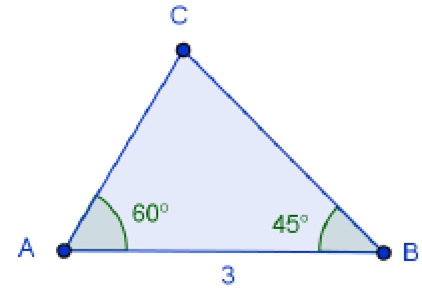
Metas Curriculares

Trigonometria e Funções Trigonométricas

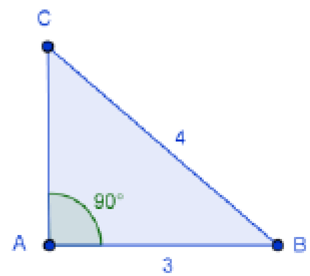
1.3



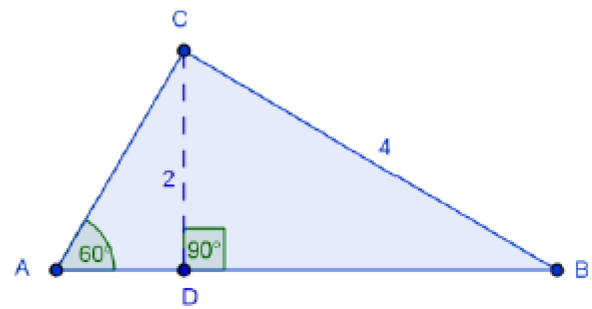
1.4.



1.5.



1.6.



É claro que a aquisição de uma certa desenvoltura no uso da Trigonometria deve ser acompanhada da **análise** e **resolução** de problemas de **natureza variada**, como se preconiza no programa (TRI11-9):

1. +Resolver problemas envolvendo a **resolução de triângulos**.

2. +Resolver problemas envolvendo a determinação de **distâncias** utilizando **ângulos** e as respetivas **razões trigonométricas**.

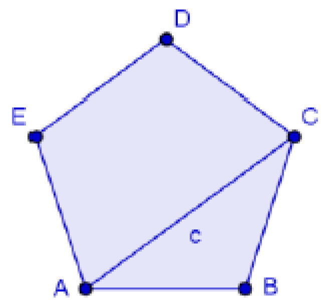
Metas Curriculares

Trigonometria e Funções Trigonométricas

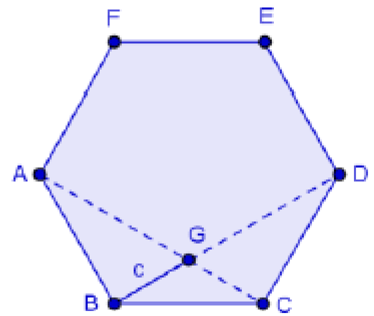
Como é habitual, no caderno de apoio apresentam-se alguns exemplos correspondentes a diferentes níveis de desempenho, como por exemplo (TRI11-9.1):

1. Nas seguintes figuras estão representados polígonos regulares de lado 2, numa dada unidade. Determine, em cada um deles, a medida c assinalada.

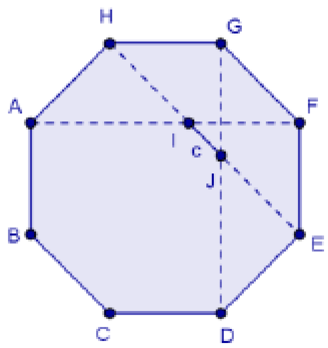
1.1.



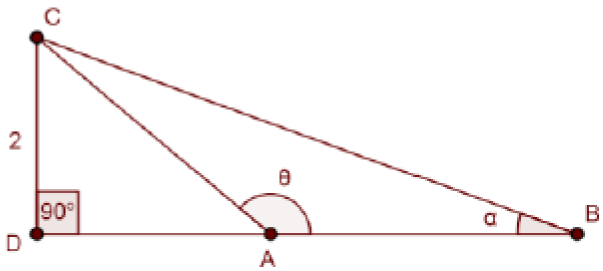
1.2*



1.3**

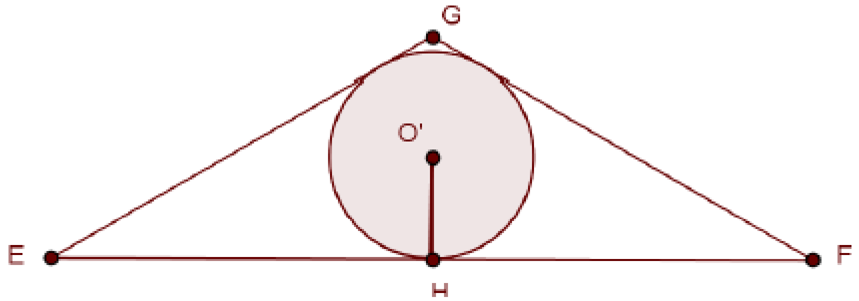


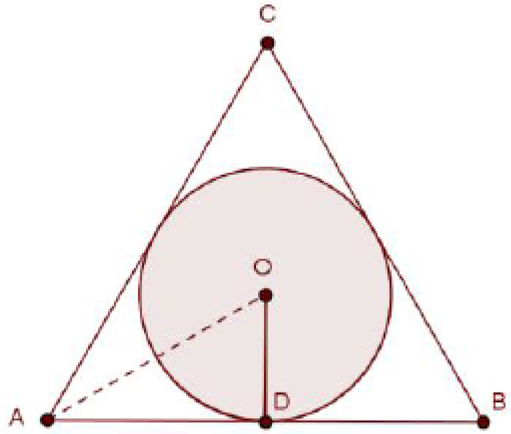
2. ** Na figura está representado um triângulo isósceles obtusângulo $[ABC]$ ($\overline{AB} = \overline{AC}$) e o ponto D, projeção ortogonal de C sobre a reta AB. Tem-se ainda que $\overline{DC} = 2$. Sendo $B\hat{A}C = \theta$ e $C\hat{B}A = \alpha$ e sabendo que $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, prove que $\sin\theta = \frac{4\sqrt{2}}{9}$ e determine o perímetro do triângulo $[ABC]$.



Metas Curriculares

3. Nas seguintes figuras estão representados um triângulo equilátero $[ABC]$ de lado 4 e um triângulo isósceles $[EFG]$ de base $\overline{EF} = 8$. Em cada um deles foi inscrito um círculo, respetivamente, de centro O e O'. Tem-se ainda $E\hat{G}F = 120°$.





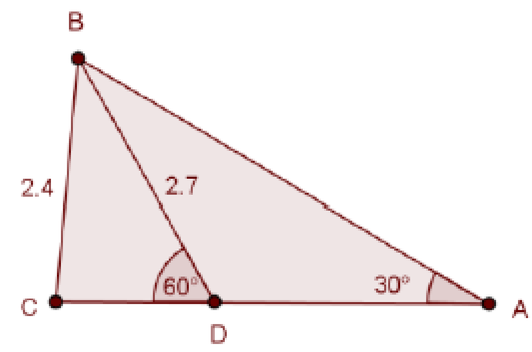
3.1. Determine a medida de $\overline{OD}$, raio do círculo inscrito em $[ABC]$.

3.2. *Determine um valor aproximado às centésimas da medida de $\overline{O'H}$, raio do círculo inscrito em $[EFG]$.

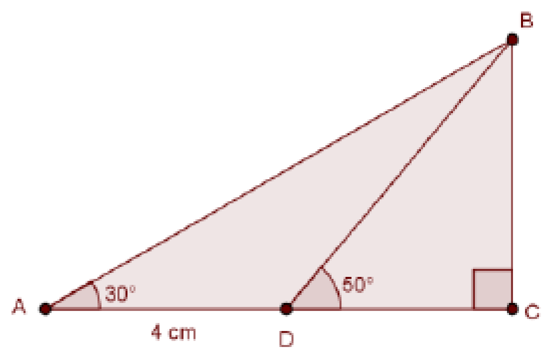
Trigonometria e Funções Trigonométricas

Ou (TRI12-9.2):

1. Tendo em conta as condições da figura, em que D pertence ao lado $[CA]$ e, numa dada unidade, $\overline{BC} = 2{,}4$, $\overline{BD} = 2{,}7$, $B\widehat{D}C = 60°$ e $B\hat{A}D = 30°$, resolva o triângulo $[ABC]$.

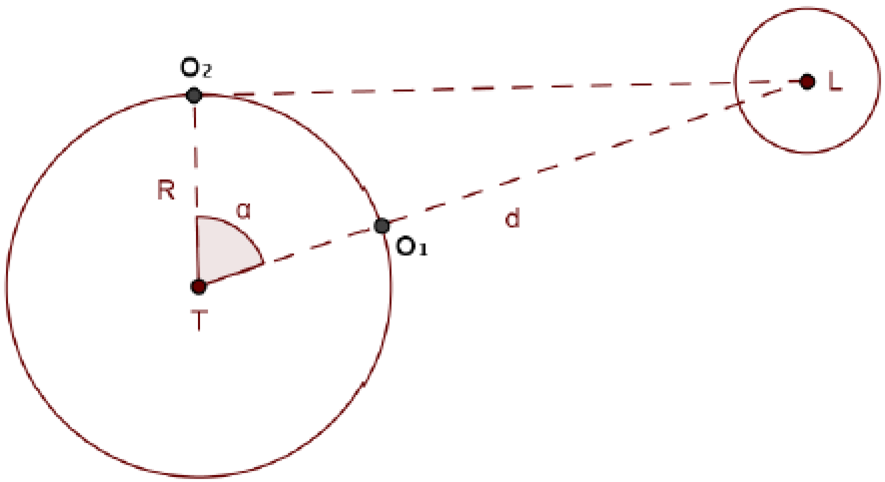


2. *Na figura seguinte o triângulo $[ABC]$ é retângulo em C e D pertence ao lado $[AC]$. Sabe-se ainda que $\overline{AD} = 4\ cm$, $B\hat{A}C = 30°$ e $B\widehat{D}C = 50°$. Determine as medidas de $\overline{BC}$ e $\overline{DC}$, com aproximação às décimas.



Metas Curriculares

3. **Suponha que, num local O_1 da Terra situado no equador à longitude de $11^\circ\,56'4'E$, um observador avista um eclipse da Lua, estando esta no zénite (ou seja, na vertical do próprio ponto O_1). O mesmo eclipse é observado também no equador mas a partir de um ponto O_2 à longitude de $100^\circ\,59'\,8''E$, sendo a Lua avistada no horizonte.



Sabendo que o raio da Terra mede cerca de $6366\ km$ determine aproximadamente a distância da Terra à Lua (distância entre os respetivos centros), interpretando adequadamente a figura junta, em que as distâncias e os ângulos não são representados realisticamente à escala, para maior clareza do desenho (utilize uma calculadora científica para efetuar os cálculos aproximados que forem necessários).

Metas Curriculares

Trigonometria e Funções Trigonométricas

Depois da extensão das **razões trigonométricas** mais básicas a todos os ângulos **convexos** introduz-se a noção de **ângulo orientado**, a qual se relaciona com o conceito de **rotação**, enquanto isometria de um plano.

Deste modo, é de toda a conveniência relembrar o que acerca de **rotações** foi desenvolvido no **Ensino Básico**, nomeadamente no 6º ano. Para o efeito, para além do programa, pode consultar-se o Caderno de Apoio do 2º ciclo, texto relativo ao descritor GM6-9.18 e o Texto Complementar de Geometria, 6º ano, 9.13 a 9.19, no mesmo caderno de apoio. Recordemos então o que no programa do Básico dizia respeito à definição e propriedades básicas das rotações (GM6-9):

14. Designar, dados dois pontos O e M e um ângulo a, um ponto M' por «**imagem do ponto** M por uma **rotação** de centro O e ângulo a» quando os segmentos $[OM]$ e $[OM']$ têm o **mesmo comprimento** e os ângulos a e MOM' a **mesma amplitude**.

15. **Reconhecer**, dados dois pontos O e M e um ângulo a (não nulo, não raso e não giro), que existem exatamente **duas imagens** do ponto M por rotações de centro O e ângulo a e **distingui-las experimentalmente** por referência ao sentido do movimento dos **ponteiros do relógio**, designando uma das rotações por «rotação de **sentido positivo**» (ou «contrário ao dos ponteiros do relógio») e a outra por «rotação de **sentido negativo**» (ou «no sentido dos ponteiros do relógio»).

Metas Curriculares

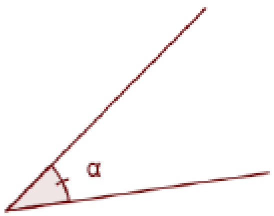
16. **Reconhecer**, dados dois pontos O e M, que existe **uma única** imagem do ponto M por **rotação** de centro O e ângulo **raso**, que coincide com a imagem de M pela **reflexão central** de centro O e designá-la por imagem de M por «meia volta em torno de O».
17. **Reconhecer** que a (única) imagem de um ponto M por uma rotação de ângulo **nulo** ou **giro** é o próprio ponto M.

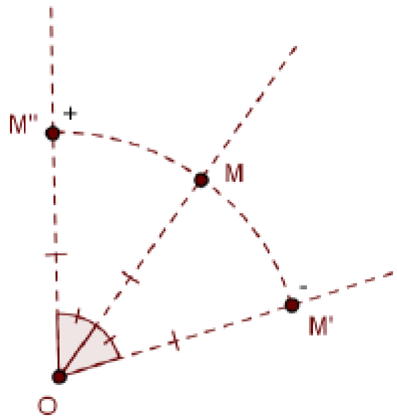
18. **Saber**, dado um ponto O, um ângulo a e as imagens A' e B' de dois pontos A e B por uma rotação de centro O e ângulo a de determinado sentido, que são iguais os comprimentos dos segmentos $[AB]$ e $[A'B']$ e designar, neste contexto, a rotação como uma «**isometria**».
19. **Reconhecer**, dado um ponto O, um ângulo a e as imagens A', B' e C' de três pontos A, B e C por uma rotação de centro O e ângulo a de determinado sentido, que são iguais os ângulos ABC e $A'B'C'$.

Introduziu-se portanto a noção de **rotação** num plano com dado centro O e de um dado ângulo α, verificando-se que, se o ângulo não for nulo, nem raso, nem giro, existem exactamente **duas imagens** de um dado ponto por rotações de centro O e ângulo α:

Metas Curriculares

Trigonometria e Funções Trigonométricas





Como é óbvio, utilizando essas **duas imagens** é possível construir uma **infinidade** de **aplicações** do plano em si próprio que a **cada ponto** associem **uma** dessas imagens, arbitrariamente escolhida.

Com o objectivo de, fixado um centro O e um ângulo α não nulo, nem raso, nem giro, **privilegiar duas** dessas aplicações, cada uma delas traduzindo a **ideia intuitiva** de "**rotação** do plano de centro O e ângulo α com determinado **sentido** ou **orientação**", **distinguiram-se** então essas duas imagens, **intuitivamente**, recorrendo ao **movimento dos ponteiros de um relógio**, de modo a poderem associar-se imagens adequadamente escolhidas dos diferentes pontos a uma **mesma rotação** do plano com determinado "sentido" ou "orientação", por comparação com o referido movimento.

Metas Curriculares

Trigonometria e Funções Trigonométricas

No 11º ano ainda não se formaliza inteiramente a noção de rotação com determinada orientação enquanto isometria de um plano, mas dá-se um passo nesse sentido, introduzindo-se a noção de ângulo orientado e distinguindo-se, ainda de modo intuitivo os ângulos com orientação positiva e negativa (TRI11-2).

1. Identificar «**ângulo orientado**» como um ângulo **não nulo nem giro** no qual se fixa um dos lados para «**lado origem**», designando o outro por «**lado extremidade**».

2. Identificar um ângulo orientado de um plano como tendo «**orientação negativa**» quando, imaginando os movimentos dos **ponteiros de um relógio** cujo mostrador se supõe situado nesse plano π, os ponteiros podem **descrever o ângulo** começando no **lado origem** e terminando no **lado extremidade**, identificar um ângulo orientado como tendo «**orientação positiva**» no caso contrário, e afetar do **sinal «$-$»** as **amplitudes** dos primeiros enquanto ângulos orientados, bem como as respetivas **medidas**.

Neste novo quadro reinterpreta-se a noção de rotação (TRI11-3):

1. Designar, dados dois pontos O e M e um ângulo orientado α em determinado plano, um ponto M' por «imagem do ponto M pela **rotação** de centro O e de **ângulo orientado** α» quando $\overline{OM} = \overline{OM'}$ e $\dot{O}M'$ for o lado extremidade do ângulo orientado de lado origem $\dot{O}M$ e com a mesma amplitude de α enquanto ângulos orientados.

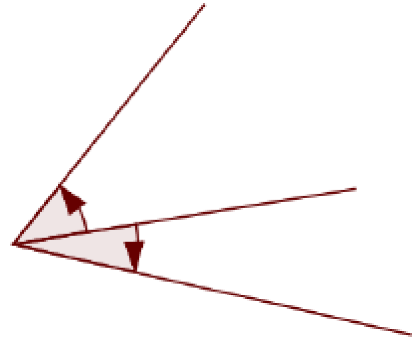
Metas Curriculares

Trigonometria e Funções Trigonométricas

Com a definição agora dada de **ângulo orientado** torna-se possível, fixado um ponto O, associar a cada ângulo orientado uma **rotação** do plano **bem determinada** de centro O, utilizando 2.2, que traduz exactamente o referido processo intuitivo introduzido no **Ensino Básico**.

É claro que se o ângulo orientado for **raso**, nada impede que se atribua também significado a "orientação negativa" e "orientação positiva" (como atrás se viu), embora ângulos rasos com orientações opostas determinem a **mesma rotação** com dado centro O.

Como foi observado no atrás referido Texto Complementar de Geometria, os **dois ângulos** que se utilizam para obter as **imagens distintas** de um ponto por **rotações** de um mesmo centro e ângulo **partilham um lado** (o que tem origem no centro de rotação e passa pelo ponto do qual se pretende determinar as imagens) e são **adjacentes**.

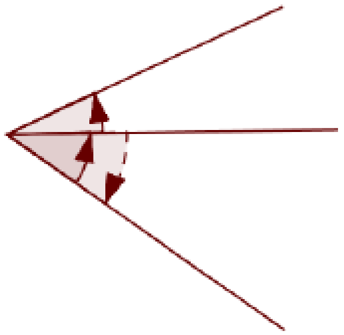


Metas Curriculares

Trigonometria e Funções Trigonométricas

Assim, embora a **orientação de ângulos** apenas se aborde no Ensino Secundário do modo **intuitivo** expresso no descritor 2.2, essa propriedade pode servir de base a uma definição **rigorosa** de “**igualdade de orientação**” de dois ângulos nos quais se distingue um lado origem e um lado extremidade, ou seja, de dois ângulos orientados (de acordo com a definição acima).

Fica claro que a dois ângulos orientados **adjacentes** que partilhem o lado **origem** deve atribuir-se **orientações opostas** e, consequentemente, se o lado **origem** de um **coincidir** com lado **extremidade** do outro, deve considerar-se que têm a **mesma orientação**, já que também se pretende que tenham orientações **opostas** dois ângulos orientados que se definem escolhendo num **mesmo ângulo** diferentes lados origem, como é óbvio da ideia intuitiva que se pretende formalizar.

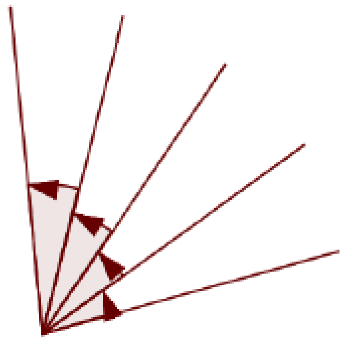


Metas Curriculares

Trigonometria e Funções Trigonométricas

Desenvolvendo estas ideias, no Caderno de Apoio do 11º ano, num texto destinado aos **professores** (texto de apoio aos descritores TRI11-2.1, 2.2 e 3.1), esboça-se uma **construção rigorosa** da relação de "**igualdade de orientação**" de ângulos orientados de um dado plano, enquanto **relação de equivalência** com exactamente **duas** classes.

Não é difícil estabelecer a ligação entre estes **critérios rigorosos** e a ideia **intuitiva** de **orientação**, que invoca o conceito de "movimentos de rotação" de semi-rectas, materializados nos movimentos imaginados dos **ponteiros de relógios**; com efeito, por exemplo, uma **sequência** de ângulos orientados com a mesma amplitude, tais que ângulos "seguidos" na sequência são **adjacentes** e partilham um lado que é **extremidade** do primeiro e **origem** do segundo, traduz de certa maneira um movimento de rotação em determinado sentido efectuado **num número finito** de passos "**discretos**".



Metas Curriculares

Trigonometria e Funções Trigonométricas

Ainda no mesmo texto do Caderno de Apoio do 11º ano relacionam-se estes “sentidos de rotação” com alguns conceitos **astronómicos**, justificando-se historicamente as designações “sentido **directo**” e “sentido **retrógado**” associadas ao sentido de rotação dos ponteiros de um relógio.

Tendo-se associado os **ângulos orientados** a **rotações** de um plano, o passo seguinte na **generalização** do conceito de ângulo consiste em introduzir um novo conceito que traduza a ideia intuitiva de “ângulo associado a uma rotação” entendida agora como gerada por um “movimento”, na qual as imagens do pontos de determinado plano fossem obtidas por rotação de uma semi-recta em torno da origem mas podendo **atingir** ou **ultrapassar** a amplitude um ângulo **giro**.

Note-se que já atrás encontrámos uma situação em que dois ângulos orientados **distintos** (nomeadamente dois ângulos rasos com orientações opostas) determinavam a **mesma rotação**. Ou seja, o facto de intuitivamente essa rotação poder ser gerada por **dois** “movimentos em sentidos **opostos**” não significa que se trate de rotações distintas, entendidas aqui como **aplicações** e não como movimentos.

Com uma noção mais geral de ângulo, intuitivamente com amplitude podendo **ultrapassar** a de um **raso**, esta situação vai ocorrer numa **infinidade** de casos distintos.

Metas Curriculares

Trigonometria e Funções Trigonométricas

Pretendemos então traduzir numa definição rigorosa a **generalização** do conceito de **ângulo orientado** como um objecto associado aos movimentos de rotação de uma semi-recta em torno da origem, "sempre em determinado **sentido**", que partam de determinada posição "**origem**", atinjam determinada posição "**extremidade**", e "percorram" uma sucessão de ângulos orientados de modo que dois seguidos sejam adjacentes e com a mesma orientação e que a soma das respectivas medidas de amplitude em dada unidade tenha determinado valor pré-fixado.

Não é difícil concluir que para caracterizar um tal "**ângulo generalizado**" basta fixar um **ângulo orientado** e esclarecer quantas "**voltas inteiras**" no mesmo sentido pretendemos acrescentar a um dos movimentos que o ângulo orientado de alguma maneira representa. Reciprocamente, dado um movimento como os acima referidos, podemos retirar-lhe o **número** necessário de **voltas inteiras** para que sobre apenas um movimento percorrendo um ângulo orientado, portanto de amplitude inferior à de um ângulo giro, ou então o ângulo nulo.

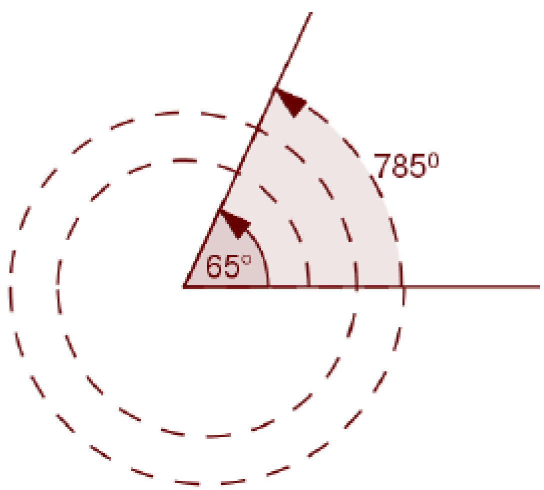
Com efeito, os ângulos orientados, introduzidos no presente domínio do 11.º ano admitem como **medidas de amplitude** em graus, juntamente com o ângulo nulo, exactamente todos os valores do intervalo $]-360, 360[$. Pretendemos definir agora ângulos, ditos «**generalizados**», que poderão ter **qualquer** medida de amplitude real.

Metas Curriculares

Trigonometria e Funções Trigonométricas

O que poderá ser, por exemplo, um ângulo de amplitude 785°?

Observe-se que $785 = 65 + 2 \times 360$. Esta igualdade, em que 785 aparece como a **soma** de uma medida de amplitude admissível de um **ângulo orientado** (65) com duas vezes a medida em graus do **ângulo giro** (2×360) leva a associar um ângulo de 785 graus a uma **rotação** de 65 graus de uma semi-recta em torno da respectiva origem, seguida de um "movimento de rotação de duas voltas completas", em torno dessa mesma origem, ambos "no sentido positivo", correspondendo assim a uma ideia de continuidade em todo o movimento.

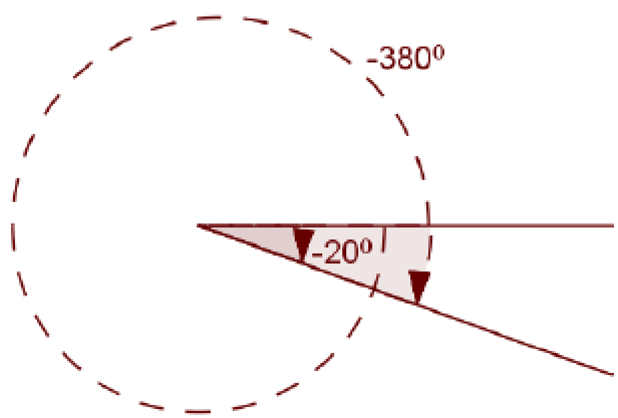


Metas Curriculares

Trigonometria e Funções Trigonométricas

Tendo em conta que qualquer número $x \geq 0$ se escreve de **maneira única** na forma $x = a + 360n$, onde $a \in [0{,}360[$ e $n \in \mathbb{N}_0$ (n é a **parte inteira** de $\frac{x}{360}$ e $a = x - 360n$), estas considerações intuitivas podem estender-se a qualquer valor de x, podendo sempre associar-se deste modo a um dado **número positivo ou nulo** x uma **medida de amplitude** não negativa (a) de ângulo orientado (ou nulo) bem determinada, e a um "**número de voltas**" também bem determinado (n) efectuadas no sentido positivo. Ou seja, x fica associado exactamente aos **ângulos orientados** α com **amplitude** de medida a e ao **número natural** ou **nulo** n.

De forma análoga, se $x \leq 0$, existe um único $a \in]-360{,}0]$ e um único $n \in \mathbb{Z}_0^-$ tais que $x = a + 360\,n$, podendo desta feita associar-se a um qualquer **número negativo** x uma **medida de amplitude** negativa ou nula (a) de ângulo orientado (ou nulo) bem determinada e a um "**número de voltas**" (n) efectuadas no sentido negativo. Por exemplo, a $x = -380 = -20 + 360 \times (-1)$ poderá associar-se um ângulo orientado de medida de amplitude -20 e uma "volta" no sentido negativo.



Metas Curriculares

Trigonometria e Funções Trigonométricas

Nas metas apresentam-se estas ideias de um modo um pouco mais formalizado: um «**ângulo generalizado**» fica definido como sendo um ângulo **orientado** (ou **nulo**) α a que se **associa** um certo "**número de voltas**", representado por um **número inteiro** n cujo **sinal** coincide com o da amplitude de α: o ângulo generalizado fica identificado com o par ordenado (α, n) TRI11-4:

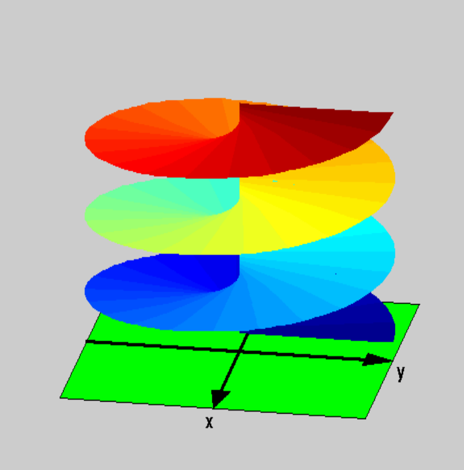
1. Identificar um «**ângulo generalizado**» (ou «ângulo **trigonométrico**») como um par ordenado $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{n})$, onde α é um **ângulo orientado** ou um ângulo **nulo** e n é um **número inteiro**, que é **positivo** ou nulo se α tiver **orientação positiva** e **negativo** ou nulo se α tiver **orientação negativa**, interpretando-o intuitivamente como o resultado de rodar o lado extremidade do ângulo α (ou, no caso de α ser nulo, o único lado, coincidente com α), realizando $|n|$ voltas completas, no sentido determinado pelo sinal de n.

2. Designar o lado origem (respetivamente extremidade) de um ângulo orientado α também por «**lado origem** (respetivamente **extremidade**) dos **ângulos generalizados** (α, n)» e um ângulo nulo ω também como «lado origem e extremidade dos ângulos generalizados (ω, n)».

Metas Curriculares

Trigonometria e Funções Trigonométricas

Por exemplo, nas figuras atrás estão representados respectivamente os ângulos generalizados $(65,2)$ e $(-20,-1)$. Como curiosidade, assinale-se que uma representação puramente geométrica destes ângulos é possível recorrendo a uma superfície dita de Riemann. Trata-se de uma "superfície folheada", representada na figura ao lado, com "folhas" que podem ser indexadas por $\mathbb{Z}$, tornando-se fácil associar o "número de voltas" n de um ângulo generalizado à n-ésima folha, representando-se nessa mesma folha o ângulo orientado α.



Nos descritores seguintes estabelece-se simplesmente que a medida de amplitude do ângulo generalizado (α, n) é igual $a + ng$, onde a é a medida de amplitude do ângulo orientado ou nulo α, o que corresponde evidentemente à construção intuitiva atrás descrita:

3. Identificar, fixado um **ângulo unidade** e sendo g a medida de amplitude dos ângulos **giros**, a **medida de amplitude** do ângulo generalizado (α, n) como $\boldsymbol{a + ng}$, onde a é a medida de amplitude do ângulo orientado ou nulo α.

Trigonometria e Funções Trigonométricas

É ainda importante referir que esta definição dos ângulos generalizados não impede que se possa descrever do modo habitual um **conjunto de medidas** de ângulos generalizados. Por exemplo, é totalmente correcto escreverem-se as equivalências:

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \cdots etc$$

De facto, a expressão «$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$» significa, neste contexto, que:

$$x \in \{y : \exists k \in \mathbb{Z}: y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\}$$

sendo certo que:

$$\left\{y : \exists k \in \mathbb{Z}: y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\} = \left\{y : \exists k \in \mathbb{Z}: y = -\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right\}$$
$$= \left\{\dots, -\frac{7\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \dots\right\}$$

Ao escrever-se uma família de medidas de amplitude na forma $x = a + kg$, $k \in \mathbb{Z}$, a **não tem** de ser a medida de um ângulo orientado ou nulo α, e, mesmo que o seja, k apenas pode ser **interpretado** como o "**número de voltas**" associado a um ângulo generalizado (α, k) se tiver o **sinal** da amplitude de α ou se α for **nulo**.

Metas Curriculares

Trigonometria e Funções Trigonométricas

De acordo com a interpretação intuitiva dos ângulos generalizados, é natural agora identificar uma **rotação** de centro O e ângulo generalizado (α, n), no caso de α ser um ângulo **nulo**, como a **aplicação identidade** no plano e nos restantes casos como a **aplicação** do plano sobre si próprio que a cada ponto distinto de O associa a imagem desse ponto pela **rotação** de centro O e ângulo orientado α (e, naturalmente, que ao ponto O associa o próprio ponto O), como é referido no descritor TRI11-4.5:

5. Identificar, fixado um ponto O e um ângulo generalizado (α, n), a «**rotação** de centro O e **ângulo generalizado** (α, n)», no caso de α ser um ângulo **nulo**, como a aplicação **identidade** no plano e nos restantes casos como a aplicação do plano sobre si próprio que a cada ponto distinto de O associa a imagem desse ponto pela **rotação** de centro O e **ângulo orientado** α e ao ponto O associa o próprio ponto O.

A interpretação **intuitiva** do **ângulo generalizado** como o "resultado da **rotação** de uma semirreta em torno da respetiva origem, com determinada amplitude" não deve induzir o erro que consistiria em supor que dois ângulos generalizados com diferentes medidas de amplitude não podem determinar a **mesma rotação**, mesmo que estejam associados ângulos **orientados** de **diferentes amplitudes**.

Nesse sentido, pretende-se que os alunos reconheçam quais os ângulos generalizados que determinam uma mesma rotação (TRI11-4):

6. **Reconhecer**, dado um ponto O e ângulos generalizados (α, n) e (α', n'), α, α' ângulos orientados, que as **rotações** de centro O e ângulos generalizados (α, n) e (α', n') **coincidem** se e somente se α e α' tiverem a **mesma amplitude** ou se tiverem **sentidos contrários** e os valores absolutos das respetivas amplitudes tiverem **soma** igual à medida de um **ângulo giro**.

Aqui "sentidos contrários" deve ser entendido, evidentemente, como um abuso de linguagem para "diferentes orientações" ou "orientações opostas". Uma justificação desta propriedade encontra-se no Caderno de Apoio do 11º ano.

Podemos agora estender aos **ângulos generalizados** as **razões trigonométricas** até agora estudadas. Para esse efeito começa-se por introduzir o **"círculo" trigonométrico** que é, de facto, uma circunferência, fixado um **referencial ortonormado directo** num plano, conceito que deve ser previamente definido e trata-se em primeiro lugar de efectuar essa extensão aos ângulos orientados (TRI11-5):

Metas Curriculares

Trigonometria e Funções Trigonométricas

1. Designar um **referencial ortonormado** num dado plano como «**direto**» quando o **primeiro quadrante**, considerado como ângulo orientado de lado origem coincidente com o semieixo positivo Ox e lado extremidade coincidente com semieixo positivo Oy, tem **orientação positiva**.

2. Designar, dado um referencial ortonormado em dado plano, a circunferência centrada na origem e de raio 1 desse plano também por «**circunferência trigonométrica**» (ou, por abuso de linguagem, por «**círculo trigonométrico**»).

3. Identificar, dado um referencial ortonormado direto em dado plano e um **ângulo orientado** α desse plano, o «**seno** de α» (respetivamente o «**cosseno** de α») como a **ordenada** (respetivamente a **abcissa**) do ponto P, **interseção** da **circunferência trigonométrica** com o **lado extremidade** do ângulo orientado de lado origem coincidente com o semieixo positivo Ox e de amplitude igual a α, representá-lo por $\sin(\alpha)$, $\mathrm{sen}(\alpha)$, $\sin\alpha$ ou $\mathrm{sen}\,\alpha$ (respetivamente por $\cos(\alpha)$ ou por $\cos\alpha$), **reconhecer** que este valor **não depende** da escolha do referencial, e que esta definição **estende** a definição de seno (respetivamente de cosseno) de ângulos geométricos **convexos**, se o identificarmos com o seno (respetivamente cosseno) de um ângulo **orientado** com a **mesma amplitude**.

Trigonometria e Funções Trigonométricas

Note-se que o reconhecimento pedido neste último descritor não pode ser, nesta fase, inteiramente formalizado, pois apenas pode basear-se no conceito **intuitivo** de **orientação** positiva ou negativa atrás introduzido; baseados neste conceito intuitivo, basta, para o efeito, reconhecer que num plano existe **apenas um** ângulo orientado com um dado **lado origem** e com dada **amplitude**.

Podemos agora também estender a **tangente** e finalmente efetuar a extensão destas **razões trigonométricas** a todos os **ângulos generalizados** (TRI11-5).

4. Identificar, dado um referencial ortonormado direto em dado plano, e um **ângulo orientado** α desse plano de lados não perpendiculares, a «tangente de α» como a **ordenada** do ponto P, **interseção** da **reta** de equação $x = 1$, **tangente** à circunferência trigonométrica no ponto de coordenadas $(1,0)$, com a **reta** suporte do **lado extremidade** do ângulo orientado de lado origem coincidente com o semieixo positivo Ox e de amplitude igual a α, representá-la por $\tan(\alpha)$,$\text{tg}(\alpha)$,$\tan\alpha$ ou tg α, **reconhecer** que $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ e que esta definição **estende** a definição de tangente de um ângulo **agudo**, se a identificarmos com a tangente de um ângulo orientado com a mesma amplitude.

5. Identificar, dado um **ângulo generalizado** $\theta = (\alpha, n)$, o «**seno** de θ», o «**cosseno** de θ» e a «**tangente** de θ» como, respetivamente, o seno, o cosseno e a tangente de α.

Metas Curriculares

Trigonometria e Funções Trigonométricas

6. **Justificar**, dados ângulos generalizados θ e θ' com a **mesma amplitude** $\hat{\theta} = \widehat{\theta'}$, que o seno, o cosseno e a tangente de θ são respetivamente **iguais** ao seno, ao cosseno e à tangente de θ' e designá-los também respetivamente por seno, cosseno e tangente de $\hat{\theta}$.

Viu-se atrás que, se dois ângulos **generalizados** (α, n) e (α', n') tiverem a mesma amplitude, então α e α' são ângulos orientados com a **mesma amplitude** (ou são ambos **nulos**). Uma vez que as razões trigonométricas dos ângulos (α, n) e (α', n') são dadas respectivamente pelas razões trigonométricas de α e de α', a **justificação** pedida resume-se a argumentar que estas coincidem, como atrás foi visto, já que ângulos orientados com a mesma amplitude e partilhando o lado origem coincidem.

Uma vez que, fixada uma **unidade de medida de amplitude**, existem **ângulos generalizados** com medidas de amplitude nessa unidade podendo assumir **qualquer** valor real, se fixarmos também um **referencial ortonormado directo** em determinado plano, pelo que acabámos de verificar existe uma **correspondência biunívoca** entre o conjunto dos **números reais** e os **ângulos generalizados** com lado origem coincidente com o semieixo positivo dos xx que associa a cada número real o ângulo nestas condições cuja medida de amplitude na unidade fixada é igual a esse número.

Metas Curriculares

Trigonometria e Funções Trigonométricas

Através dessa bijecção podemos agora, por **composição**, transformar as **razões trigonométricas**, entendidas como funções de ângulo generalizado, em **funções reais de variável real**.

Tais funções **não dependem** do **referencial** ortonormado direto fixado, atendendo ao que atrás se viu acerca das razões trigonométricas de ângulos generalizados, mas **dependem** evidentemente da **unidade** fixada para as medidas de **amplitude**.

De entre as funções que assim se podem definir privilegiam-se as que resultam de se fixar para unidade de medida de amplitude o chamado **radiano**.

A definição de **radiano** depende essencialmente do conceito de **comprimento de arco** de circunferência. Embora este conceito não seja ainda inteiramente formalizado, no Caderno de Apoio do 11º ano (TRI11-6.1 e 6.2) sugerem-se algumas abordagens que poderão ser utilizadas com maior ou menor profundidade para o **reconhecimento** das propriedades inerentes à introdução desta unidade (TRI11-6):

Trigonometria e Funções Trigonométricas

1. Designar por «**radiano**» a amplitude de um ângulo ao centro de uma circunferência que nela determina um **arco** de **comprimento** igual ao **raio** e **reconhecer** que o radiano **não depende** da escolha da **circunferência**, aproximando o comprimento do arco de circunferência por comprimentos de linhas poligonais inscritas.

2. Efetuar conversões de medidas de amplitude de ângulos de graus para radianos e de radianos para graus, começando por justificar que um ângulo giro tem amplitude 2π radianos.

Fixada esta nova unidade, introduzem-se finalmente as **funções reais de variável real** que serão doravante designadas por **funções trigonométricas** (TRI11-7):

1. Identificar, dado um **número real** x, a «**tangente** de x» (respetivamente o «**seno** de x» e o «**cosseno** de x») como a tangente (respetivamente o seno e o cosseno) de um **ângulo generalizado** de **medida de amplitude** igual a x, em **radianos**, sempre que esse valor esteja definido, e designar a função assim determinada nesse conjunto de números reais e com conjunto de chegada $\mathbb{R}$ por «(função) tangente» (respetivamente «(função) seno» e «(função) cosseno»), representando-a por «$\tan$» ou «tg» (respetivamente por «$\sin$» ou «sen» e por «$\cos$») e o respetivo valor num ponto x do domínio também por $\tan x$ ou $\mathrm{tg}\, x$ (respetivamente por «$\sin x$» ou «$\mathrm{sen}\, x$» e por «$\cos x$»).

Metas Curriculares

Trigonometria e Funções Trigonométricas

Como já era habitual estudam-se as propriedades básicas destas funções e, em seguida, introduzem-se as respectivas "inversas" (TRI11-8):

1.+**Reconhecer** que as funções $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$, $\cos : [0, \pi] \to [-1,1]$ e $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$, obtidas por **restrição** respetivamente das funções sin, cos e tan aos intervalos indicados e tomando para conjuntos de chegada os respetivos contradomínios, são **bijetivas** e designar as **bijeções recíprocas** por «(função) **arco-seno**» (arcsin ou arcsen), «(função) **arco-cosseno**» (arccos) e «(função) **arco-tangente**» (arctan ou arctg), respetivamente, sabendo que são valores aproximados destas funções que as calculadoras fornecem, associados às teclas, respetivamente, $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ e $\tan^{-1}$, desde que esteja selecionado o **radiano** para unidade de medida dos ângulos.

Como também já era habitual, abordam-se ainda neste domínio do 11º ano diversos tipos de problemas, envolvendo **fórmulas trigonométricas**, as chamadas **equações trigonométricas**, etc.

Metas Curriculares